Ejercicios Ayudantía: 20/05/2016

Ejercicio 1:

Diga falso y verdadero. Demuestre en cada caso.

a) $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = 0$.

b) $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$.

d) $\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1$.

e) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1$.

Ejercicio 2:

Un dado equilibrado se lanza tres veces consecutivas, y resulta que la suma de los tres números obtenidos es 11. Encuentre la probabilidad de que en el primer lanzamiento de haya obtenido un 5.

Ejercicio 3:

Una primera caja contiene tres canicas blancas y dos negras. Una segunda caja contiene dos canicas blancas y cuatro negras. Se escoge una caja al azar y se extrae una canica. Únicamente se conoce que la canica obtenida es blanca, encuentre la probabilidad de que ésta haya sido obtenida de la primera caja.

Ejercicio 4:

Diga falso o verdadero. Demuestre en cada caso.

a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$.

b) $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

c) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$.

d) $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)$.

Ejercicio 5:

Demuestre que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Ejercicio 6:

Demuestre que

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- ... + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cup A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cup A_j \cup A_k) \\ &- ... + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_n)\end{aligned}$$

Ejercicio 7:

Sean $A_1, ..., A_n$ independientes. Demuestre que

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - \mathbb{P}(A_k)].$$

Ejercicio 8:

Demuestre que X es variable aleatoria si y sólo si, $(X > x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9:

Determinar si las siguientes son funciones de distribución:

a) $\alpha F(x) + (1-\alpha)G(x)$, con $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) $F(x) + G(x)$.

c) $F(x)G(x)$.

d) $\frac{2G(x)}{1+F(x)}$.

Donde $F(x)$ y $G(x)$ son funciones de distribución.

Ejercicio 10:

Encuentre la constante c que hace a $f(x)$ una función de densidad.

a) $f(x) = cx^2$, para $0 < x < 1$.

b) $f(x) = cxe^{-2x^2}$, para $x > 0$.

c) $f(x) = cx^{-2}$, para $x > 1$.

d) $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$.

Ejercicio 11:

Sea X variable aleatoria discreta con valores en $\{0, 1, ...\}$ y con esperanza finita. Demuestre que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Usa esta fórmula para demostrar que

a) Si $X \sim \text{Geo}(p)$, entonces $E(X) = \frac{(1-p)}{p}$.

b) Si $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, entonces $E(X) = \lambda$.

Ejercicio 12:

Calcula el n-ésimo momento de una variable aleatoria cuya función de probabilidad o de densidad es:

a) $f(x) = \frac{e^{-1}}{x!}$, para $x = 0, 1, 2, ...$

b) $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13:

Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatoria independientes con $X_i \sim \exp(\lambda_i)$, para $i = 1, ..., n$. Demuestre que $X := \min\{X_1, ..., X_n\} \sim \exp(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.

Ejercicio 14:

Sea X variable aleatoria continua, con densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}}{B(\alpha, b)}, \qquad x \in (0, 1)$$

Donde $\alpha, b > 0$ y $B(\alpha, b) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx$. Demuestre:

a) $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+b}$.

b) $E(X^n) = \frac{B(\alpha+n,b)}{B(\alpha+b)}$.

c) $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha b}{(\alpha+b+1)(\alpha+b)^2}$.

Ejercicio 15:

Sea X variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}\lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

donde $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$. Demuestre que:
a) $E(X) = \frac{n}{\lambda}$.

b) $E(X^m) = \frac{\Gamma(m+n)}{\lambda^m\Gamma(n)}$, para $m = 0, 1, ...$

c) $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$.

Ejercicio 16:

Investigue si las siguietes son funciones de distribución:

a) $F(x,y) = 1 - e^{-xy}$, para $x, y > 0$.

b) $F(x,y) = 1 - e^{-x-y}$, para $x, y > 0$.

Ejercicio 17:

Calcule la constante c tal que f es una función de densidad. Más aún calcule las densidades marginales

a) $f(x,y) = cx$, para $0 < y < x < 1$.

b) $f(x,y) = c(x+y)$, para $0 \leq x, y \leq 1$.

c) $f(x,y) = c(x^2 + \frac{xy}{2})$, para $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

Ejercicio 18:

Calcule las fucniones de densidad condicional de $f_{x|y}(x|y)$, para las siguientes funciones de densidad

a) $f(x,y) = \frac{1}{ab}$, para $0 < x < a$, $0 < y < b$.

b) $f(x,y) = 24x(1-x-y)$, para $x, y > 0$, $x + y < 1$.

c) $f(x,y) = 2\frac{(4x+y)}{5}$, para $0 < x, y < 1$.

Ejercicio 19:

Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad $f(x,y)$ dada la siguiente tabla

(x,y)	-1	0	1
1	0.1	0.05	0.1
2	0.06	0.2	0.04
3	0.1	0.05	0.3

a) Gráfique $f(x,y)$ y compruebe que efectivamente se trata de una función de densidad conjunta.

b) Calcule y grafique las densidades marginales $f_x(x)$ y $f_y(y)$.

c) Demuestre que X y Y no son independientes.

d) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Ejercicio 20:

Demostra que

$$\text{Var}(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k) + 2 \sum_{j<k} \text{Cov}(X_j, X_k).$$

Dedusca que bajo independencia

$$\text{Var}(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k).$$

Ejercicio 21:

Sea a cualquier número real fijo. Encuentra variables aleatorias X y Y tales que $\text{Cov}(X, Y) = a$.

Ejercicio 22:

Sea X con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$. Encuentre a función de densidad de la variable aleatoria:

a) $Y = \text{sen}(X)$.

b) $Y = \cos(X)$.

Ejercicio 23:

Sea $X \sim N(0, 1)$, encuentre la distribución de X^2.

Nota: Esta distribución es conocida como la distribución $\chi_(1)^2$.

Ejercicio 24:

Demuestre el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^{n-1}e^{-x}}{\Gamma(n)}dx = \frac{1}{2}.$$

Sugerencia: Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes idendicamente distribuidas, con $X_1 \sim \exp(\lambda)$, entonces $X_1 + ... + X_n \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.