Elementos de Estadística y Probabilidad

Tarea 9

Entregar: Todas
Fecha de entrega: Viernes 27 de mayo, 2016.

1. En teoría de graficas la grafica $G(n, p)$ (de Erdös-Rényi) se construye con n nodos que se conectan aleatoriamente con probabilidad p. Un arco es la representación de una conexion entre dos nodos. En la gráfica $G(n, p)$ cada arco entre cualesquiera dos nodos se incluye en la gráfica con probabilidad p (con probabilidad $(1-p)$ no se incluye) y esta selección (o no) es independiente de la existencia (o no) de cualquier otro arco. Considere que la grafica no permite que existan arcos que contectan un nodo con sí mismo, sino solo hay arcos de la forma $(v_i, v_j) =$, donde v_i, v_j son nodos y son diferentes.

   i. ¿Cuál es la distribución de la variable X que define el número de conexiones a otros nodos que un nodo seleccionado aleatoriamente de la población tiene?
   ii. Si $n = 10$ y $p = 0.3$
      a. Calcule la probabilidad un nodo seleccionado aleatoriamente sea aislado (sin conectarse con algún otro nodo). Esto es equivalente a obtener la proporción de nodos sin ninguna conexión.
      b. Calcule la probabilidad de que un nodo seleccionado aleatoriamente tenga a lo ms tres conexiones.
   iii. Si n es grande (n=1000) y p pequeña ($p = 0.05$), ¿cómo puede aproximarse a las respuetas de las preguntas en ii? Obtenga las respuestas con esa opción.

2. Considere n observaciones iid de X cuya distribución es Bernoulli(0.3)

   i. ¿Cuál es la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$? (Demuestre considerando que se sabe que la suma de dos v.a. iid Bernoulli(p) se distribuye Binomial$(1, p)$)
   ii. Por otro lado ¿el Teorema central del limite que nos dice de Y cuando n es muy grande? Especifique los parámetros de las distribuciones involucradas.
   iii. Simule $n = 10$ observaciones de X y sumelas. Repita esto 1000 veces y grafique el histograma de probabilidad de estos 1000 datos. A esta gráfica sobreponga las distribuciones de acuerdo a i. y ii.
   iv. Repita iii. con $n = 10000$

3. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables X y Y como $X = I_A$, $Y = I_B$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas

   i. Las variables aleatorias X y Y son independientes
   ii. $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$
   iii. $P(XY = X^2Y^2) = 1$
   iv. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo (0,1)
   v. Las variables X y Y tienen la misma distribución.

4. Demostrar que la matriz de Varianzas-Covarianzas del vector $\underline{X} = X_1, \ldots, X_m$, $Cov(\underline{X})$, cumple la siguiente igualdad

$$Cov(\underline{X}) = E(\underline{X}\underline{X}^t) - E(\underline{X})\left[E(\underline{X})\right]^t$$

5. Demostrar que la matriz de Varianzas-Covarianzas del vector $\underline{X}$, $Cov(\underline{X})$, cumple la siguiente igualdad

$$Cov(\underline{c} + A\underline{X}) = ACov(\underline{X})A^t,$$

donde $\underline{c}$ es un vector constante de longitud k y A es una matrix constante $k \times m$.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de X con fd $\theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, donde $\theta > 0$

   i. Obtenga el estimador puntual de θ por el método de momentos
   ii. Obtenga la función de verosimilitud de θ y grafíquela
   iii. Obtenga el estimador máximo verosímil de θ

7. Los tiempos entre fallas consecutivas (en días) de un servidor se distribuye exponencial(λ). Se tiene registrados los ultimos tiempos entre fallas:

$$1.0,\ 1.8,\ 3.3,\ 4.5,\ 6+,\ 4.3,\ 2.4,\ 0.2,\ 6+,\ 6+$$

donde 6+ indica que lo único que se sabe es que el tiempo entre dos fallas consecutivas fué mayor a 6 días.

   i. Obtenga la función de verosimilud de λ y grafíquela
   ii. Obtenga el estimador máximo verosímil de λ