CIMAT

Confiabilidad y Análisis de supervivencia

Tarea 2

Fecha de entrega: Jueves 14 de septiembre, 2017

1. Obtenga $S(t)$, $h(t)$ y $H(t)$ para las siguientes distribuciones de falla (muerte):

   a. Poisson (λ)

   b. Exponencial. $f(t) = \lambda \exp(\lambda t)$

   c. Weibull.
   $$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}\exp(-(\lambda t)^{\beta})$$

   d. Gamma.
   $$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{\lambda t}}{\Gamma(k)}$$

   e. Gumbel.
   $$f(t) = \frac{1}{b}\exp\left[\frac{t-a}{b} - \exp\left(\frac{t-a}{b}\right)\right]$$

   f. Log Normal.
   $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}\exp\left[-\frac{(ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

   g. Log-Logistica
   $$f(t) = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left[1+(\frac{t}{\alpha})^{\beta}\right]^2}$$

2. Si M_1 y M_2 son martingalas en la misma base estocástica $(\Omega, \{\mathscr{F}_t\}, \mathscr{F}, P)$ demuestre que

   a. $aM_1(t)$, donde a es constante

   b. $M_1(t) - M_2(t)$

   son martingalas.

3. Sea (X_i, δ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ un conjunto de datos que pueden ser censurados aleatoriamente. Defina
   $$N_i(t) = I(X_i \leq t, \delta_i = 1), \qquad t \geq 0$$
   Si definimos $N(\cdot) = \sum_{i=1}^n N_i(\cdot)$, $A(\cdot) = \sum_{i=1}^n \int_0^t I(X_i \geq u)h(u)du$, y $M(\cdot) = N(\cdot) - A(\cdot)$. Suponga que $h(t) = h = 0.06$, $n = 8$ y las observaciones $\{(X_i, \delta_i)\}_1^n$ son

   (4.7, 0), (11.6, 0), (2.1, 1), (5.2, 1), (3.4, 0), (5.9, 1), (17.3, 0), (12.1, 1)

   Grafique $N(\cdot)$, $A(\cdot)$ y $M(\cdot)$ para estos datos.

4. Si $M(t)$ es una $\mathscr{F}_t$-martingala tal que $M(0) = 0$ y $E(M^2(t)) < \infty$.

   a. Demuestre que $\forall s, t \geq 0$
   $$Cov\left((M(t+s), M(t)\right) = Var[M(t)].$$

b. Considere el proceso de conteo con censura y la martingala del teorema de descomposición de Doob-Meyer $M(t) = N(t) - A(t)$. Obtenga expresión de $Var[M(t)]$.

5. Sea T tiempo de falla y h su función de riesgo. Pruebe que $\int_t^{t+s} h(u)P(T \geq u)du = P(t \leq T < t+s, \delta = 1)$.