Elementos de Estadística y Probabilidad

Tarea 2

Entregar: 1, 2, 9, 10, 11, 13, 14
Fecha de entrega: Miercoles 22 de febrero, 2017.

1. Las letras del alfabeto telegráfico Morse están formadas por una sucesión de de rayas y puntos con repeticiones permitidas. ¿Cuántas letras se pueden formar con n símbolos? ($n \in \mathbb{N}$). ¿Cual es el valor mínimo de n para crear las letras de un alfabeto de longitud 30?

2. Cada pieza de dominó está marcada con dos números. Las piezas son simétricas, de tal forma que la pareja de números no tiene un orden. ¿Cuántas piezas diferentes se pueden formar con los números $1, 2, \dots, n$?

3. Si se colocan aleatoriamente n bolas en n celdas, encontrar la probabilidad de que exactamente una celda permanezca vacía.

4. Un lote consta de 10 artículos sin defecto (buenos), 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se escogen aleatoriamente (y con la misma probabilidad que cualquiera otros) dos artículos (sin sustitución), encontrar la probabilidad de que:

   i. Ambos sean buenos
   ii. Por lo menos uno sea bueno
   iii. A lo más uno sea bueno
   iv. Exactamente uno sea bueno
   v. Ninguno sea bueno

   Para en este ejercicio trabaje el resultado hasta que sea un número real.

5. Considere las cuadriculas en Fig. 1 y Fig 2.

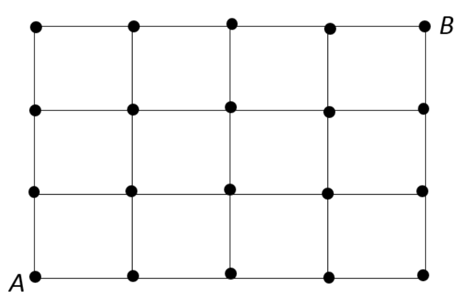

Fig 1.

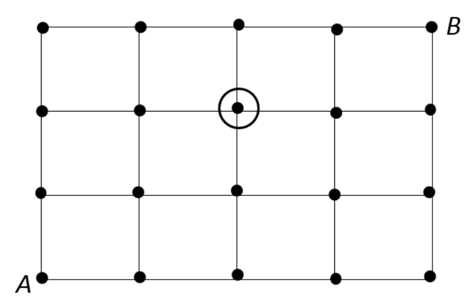

Fig 2.

   i. Suponga que el punto de inicio es el punto A y usted puede ir un paso arriba o un paso a la derecha en cada movimiento. Estos movimientos continuan hasta alcanzar el punto B. Cuántos diferentes caminos hay de A a B? (Fig 1) Hint: Note que para alcanzar B de A debe tomar 4 pasos a la derecha y tres pasos arriba.
   ii. Considere la Fig. 2 y diga cuantos diferentes caminos hay de A a B que pasan por el punto en el círculo.

6. *Problema familiar.* En una familia de cuatro hijos, los ninños lavan platos por turnos. De un total de cuatro roturas, tres fueron causados por el hijo menor y por esta razón fue calificado de torpe. ¿Era justificado que él atribuyera la frecuencia de sus roturas al azar?

7. Un estudiante tiene que responder 7 de 10 preguntas de un examen. Si él/ella puede escoger cualesquiera 7 preguntas, ¿cuantas opciones tiene?. Si tiene que contestar al menos tres de las tres primeras preguntas, ¿cuantas opciones tiene entonces?

8. ¿Cuántos subconjuntos de tamaño 4 del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$ contienen al menos uno de los elementos 1,2,3,4,5?

9. En un lote de estacionamientos hay doce lugares en hilera. Un hombre observó que había ocho coches estacionados y que los cuatro lugares vacíos eran adyacentes uno al otro. Dado que hay cuatro lugares vacíos ¿es sorprendente este arreglo (es decir, indica que no hay aleatoriedad)? Para responder a esto obtenga la probabilidad de que los lugares vacíos sean contiguos si es que carros se estacionan en forma aleatoria.

10. *Difusión de Rumores.* En un pueblo de $n + 1$ habitantes, una persona le rumorea algo a una segunda persona, quien lo repite a una tercera, etc. En cada paso se escoge aleatoriamente (y con la misma probabilidad) al receptor del rumor de entre n personas disponibles. Encontrar la probabilidad de que el rumor pase r veces sin

    i. Regresar al que lo originó.
    ii. Repetírsele a una persona.

11. Demuestre que
$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

12. Cuantos números de 5 dígitos se pueden formar de los enteros $1, 2, \ldots, , 9$ si los dígitos no pueden aparecer más de dos veces? (Entonces, por ejemplo el número 41434 no está permitido).

13. En R usted puede obtener muestras (con o sin reemplazo) utilizando la función `sample` (`?sample` para obtener ayuda). Obtenga $m = 100$ muestras de tamaño 3 sin reemplazo de los elementos 1,2,3,4,5. Diga el porcentaje de veces que las muestras son iguales al resultado (1,3,5). Considere $m = 10000$ y vuelva a obtener este porcentaje. ¿En ambos casos qué tanto dista el porcentaje al valor de la probabilidad de obtener (1,3,5)? (Hint: puede encontrar util la función `all`).

14. Se tiene una urna con n_1 bolas blancas y $n - n_1$ bolas negras, si se extrae una muestra de tamaño r con reemplazo, demuestre que la probabilidad de tener m bolas blancas ($m \leq r$) es
$$\binom{n}{m}\left(\frac{n_1}{n}\right)^m\left(\frac{n-n_1}{n}\right)^{r-m}$$