Elementos de Estadística y Probabilidad

Tarea 4

Entregar: 4, 5, 7, 8, 11, 12
Fecha de entrega: Miércoles 22 de marzo, 2017.

1. Sea X v.a. con fdp dada por la siguiente tabla:

y	0	1	2	3	4	5
$P_Y(y)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	?

   Calcule

   i. $P_Y(5)$.
   ii. $E(X)$, $Var(X)$.
   iii. $P_W(w)$ donde $W = X^2$.
   iv. $P_Z(z)$ donde $Z = \ln(X)$.

2. Un libro "de apuestas" menciona esta estrategia "ganadora" para el juego de ruleta. Se recomienda que el jugados apueste un peso al rojo (que aparece con probabilidad 18/38). Si el rojo aparece, entonces el jugador debe tomar el peso ganado y retirarse. Si el jugador pierde la apuesta (con probabilidad 20/38) debe apostar nuevamente un peso en los siguientes dos turnos y luego retirarse. Si X denota las ganacias (perdidas) del jugador cando se retira,

   i. Calcule $P(X > 0)$.
   ii. ¿Esta usted convencido(a) de que esta estrategia es de hecho una "ganadora"? Argumente su respuesta.
   iii. Encuentre $E(X)$.

3. * (de Méré's paradox). Se lanza uno o dos dado justos multiples veces.¿Cuál de los siguientes dos eventos tiene probabilidad más grande?

   i. Al menos resulta un 6 en cuatro tiros de un solo dado
   ii. Al menos resultan dos 6 simultáneos en 24 tiros de los dos dados.

4. Supóngase que la v.a. X tiene valores posibles $1, 2, \ldots$ y $P(X = j) = 1/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$.

   i. Calcular $P(X \text{ es par})$.
   ii. Calcular $P(X \geq 5)$.
   iii. Calcular $P(X \text{ es divisible entre3})$.

5. Se tiene una población de N personas de las cuales M son daltónicas ($M < N$). Si se muestrean sin reemplazo n de ellas

   i. Muestre que la v.a. X que reporta el número de personas daltónicas en la muestra se distribuye hipergeométrica (especifique el soporte y los parámetros de ésta distribución)
   ii. Verifique que la fdp es no negativa y que la suma sobre los elementos de su soporte es igual a 1
   iii. Obtenga la media de esta distribución

iv. Obtenga la varianza de esta distribución (Hint: Tal vez prefiera obtener primero E[X(X-1)])

6. Se tiene una secuencia de experimentos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p. Suponga que un estudiante quiere aprobar su examen TOEFL. Si no fuera capaz de aprender de los exámenes anteriores, ni perder conocimientos entre exámen y examen, la sucesión de resultados en los examenes que éste presenta podrá considerarse como independientes y Bernoulli con el mismo parámetro p.

   i. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga que presentar el examen n veces para aprobarlo (es decir, fallar $n-1$ ocasiones pero pasarlo en la última ocasión n). Esta variable (la que cuenta el número de examenes a presentar para aprobarlo) se dice que tiene distribución geométrica (Geom(p)). De su fdp y no olvide señalar su soporte y espacio paramétrico.

   ii. Verifique que la fdp es no negativa y suma sobre todos los valores de su soporte es igual a 1.

   iii. Obtenga su media y varianza.

   iv. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante falle n veces antes de aprobar el examen?. Esta variable también se considera con distribución geométrica, pero aunque guarda una relación 1-1 con la anterior su expresión (parametrización) es diferente. De su fdp y no olvide señalar su soporte y espacio paramétrico.

   v. Obtenga la media y varianza de esta parametrización.

7. Considérese una v.a. X con resultados posibles $0, 1, 2, \ldots$ y $P(X = j) = (1-a)a^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

   i. ¿Para qué valores de a se tiene una fdp?

   ii. Demostrar que para dos enteros positivos s y t se tiene

$$P(X > s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

8. Suponga que $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Si $E(X) = 3Var(X)$, encuentre $P(X = 0)$.

9. Se lanza una serie de cohetes hasta qeu ocurre el primer lanzamiento exitoso. Si esto no sucede en cinco ensayos, el experimento se detiene y se inspecciona el equipo. Supóngase que hay una probabilidad constante de 0.8 de tener un lanzamiento exitoso y que los ensayos sucesivos son independientes. Además, el costo del primer lanzamiento es K dólares, mientras que los siguientes cuestan $K/3$ dólares. Cada vez que hay un lanzamiento exitoso, se obtiene cierta cantidad de información que puede expresarse como una ganancia financiera de C dólares. Si T es el costo neto del experimento, encontrar la distribución de probabilidades de T.

10. Al poner en funcionamiento una máquina, existe cierta probabilidd de que el operario cometa un error. De manera realista se puede suponer que éste aprende en si la probabilidad de cometer errores disminuye cuando use la máquina en repetidas coasiones. Supongamos que el operario hace n intentos y que los n ensayos son independientes. Supongamos de manera específica que

$$P(\text{un error cometido en la i-ésima repetición}) = 1/(i+1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

    Supongamos que se consideran 4 intentos ($n = 4$) y que se define la v.a. X como el número de operaciones hechas sin error en la máquina. Obervemos que X no se distribuye Binomial porque la probabilidad de "éxito" no es constante.

11. Una v.a. X se denomina Binomial Negativa(m, p) (BN(m, p)) ssi su fdp es

$$P(X = x) = \binom{x-1}{x-m} \theta^k (1-\theta)^{x-m} I_{1,2,\ldots}(x), \qquad m \in \mathbb{N}, \theta \in (0, 1).$$

i. Demuestre que la suma de dos v.a.'s independientes con distribuciones Geom(p) (como definida en 2.i) tiene fdp BN($2, p$)

ii. Demuestre que la suma de dos v.a.'s independientes con distribuciones BN(m_1, p) y BN(m_2, p), respectivamente, tiene fdp BN($m_1 + m_2, p$)

iii. Entonces ¿qué puede decir de la suma de m v.a.s independientes Geométricas con mismo parámetro p?

iv. ¿Qué es lo que reporta la v.a. asociada a la distribución BN(m, p)?

v. Obtenga la media de la v.a. $X \sim$ BN(m, p)

vi. En total semejanza con la distribución geométrica, existe otra parametrización de la distribución Binomial Negativa asociada a la variable aleatoria que cuenta el número de fracasos (en una sucesión de ensayors Bernoulli(p) independientes) antes de tener m éxitos. Escriba su fdp y asegúrese de poder obtenerla si la requiriera.

12. Considere el experimento de tirar dos dados justos. Si X v.a. reporta el menor valor de los dados que los dados muestran luego de tirarlos,

    i. Obtenga la fdp de X

    ii. Obtenga la media de X

    iii. Obtenga 100 simulaciones de X y el promedio de éstas. (Recuerde incluir el código usado)

    iv. Repita el inciso anterior pero con 10,000 simulaciones.

    v. Grafique los histogramas de frecuencias relativas de las simulaciones en iii. y compare con la fdp obtenida en i. Compare también la media calculada y el promedio de las simulaciones.

    vi. Grafique los histogramas de frecuencias relativas de las simulaciones en iv. y compare con la fdp obtenida en i. Compare también la media calculada y el promedio de las simulaciones.

13. A and B play the following game: A writes down either number 1 or number 2 and B must guess which one. If the number that A has written down is i and B guesses correctly, B receives i units from A. If B makes a wrong guess, B pays 3/4 unit to A.

    i. If B randomizes his decision by guessing 1 with probability p and 2 with probability $1-p$, determine his expected gain if

    - A has written down number 1 and
    - A has written down number 2.

    ii. What value of p mazimizes the minimum possible value of B's expected gain and what is this maximun value? (Note that B's expected gain depens not only on p but also on what A does.)

    iii. Consider now player A. Suppose that she also randomizes her decision writing down number 1 with probability q. What is A's expected loss if

    - B chooses number 1
    - B chooses number 2

    iv. What value of q minimizes As maximum expected loss? Show that the minimum of A's maximum expected loss is equal to the maximum of B's minimum expected gain. This result, known as the minimax theorem, was first established in generality by the mathematician John von Neumann and is the fundamental result in the mathematical discipline known as the theory of game.

14. El número de llamadas en una hora a un telefono de servicios de una compañia internacional se puede modelar como una v.a. Poisson(λ=1.2).

    i. Encuentre la probabilidad de que no se recibirá ninguna llamada en un turno de 6 horas.

ii. De la expresión de la probabilidad de que Armando, quien comienza a trabajar en el centro, no tendrá que atender ninguna antes de su j-ésimo turno, donde tendrá que atender al menos una.

iii. ¿Cual es la probabilidad de que Armando tenga que contestar al menos alguna llamada en 4 de sus primeros 100 turnos (de 6 horas cada uno)? Utilize la aproximación Poisson.

15. Compare la aproximación Poisson a la Binomial para los siguientes casos:

    i. $P(X = 2)$ cuando $n = 8, p = 0.1$

    ii. $P(X = 9)$ cuando $n = 10, p = 0.95$

    iii. $P(X = 0)$ cuando $n = 10, p = 0.1$

    iv. $P(X = 4)$ cuando $n = 9, p = 0.2$

16. Una uran contiene 4 bolas blancas y 4 bolas negras. Aleatoriamente escogemos 4 bolas sin reemplazo. Si 2 de las bolas seleccionadas son blancas (y las otras 2 negras) paramos. Si no, volvemos a poner las bolas en la urna y nuevamente seleccionamos 4 bolas. Este proceso se continua hasta que en la muestra extraia se tengan exactamente 2 bolas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraigan n muestras?

17. Si X es una variable que toma valores en los naturales, muestre que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

    ¿Qué se puede decir si X con soporte $\{1, 2, \ldots, m\}$?

18. Sea X v.a. con fdp

$$P(X = a) = p \text{ y } P(X = b) = 1 - p.$$

    i. Encuentre $E(X)$ y $Var(X)$.

    ii. Muestre que $(X - b)/(a - b)$ es una v.a. Bernoulli.

19. En una comunidad hay m familias. Estas se clasifican segun el número de hijos, de tal forma que $n_1, n_2, \ldots, n_r$ es el número de familias con $1, 2, \ldots, r$ hijos, respectivamente. Entonces $\sum_1^r n_i = m$. Hay dos procesos con el que se selecionan familias para contar el número de hios. En el primero una familia se selecciona aleatoriamente y sea X el número de hijos en esa familia. En el segundo proceso se seleccion aleatoriamente un hijo de todos los hijos en la comunidad ($\sum_1^r in_i$ en total) y sea Y el número de hijos en la familia del hijo seleccionado. Muestre que $E(X) \leq E(Y)$.