Elementos de Estadística y Probabilidad

Tarea 5

Entregar: 4, 5, 9, 10, 14, 16, 22, 23.
Fecha de entrega: Jueves 27 de abril, 2017.

1. Se tiene una secuencia de experimentos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p. Suponga que un estudiante quiere aprobar su examen TOEFL. Si no fuera capaz de aprender de los exámenes anteriores, ni perder conocimientos entre exámen y examen, la sucesión de resultados en los examenes que éste presenta podrá considerarse como independientes y Bernoulli con el mismo parámetro p.

   i. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga que presentar el examen n veces para aprobarlo (es decir, fallar $n-1$ ocasiones pero pasarlo en la última ocasión n). Esta variable (la que cuenta el número de examenes a presentar para aprobarlo) se dice que tiene distribución geométrica (Geom(p)). De su fdp y no olvide señalar su soporte y espacio paramétrico.
   ii. Verifique que la fdp es no negativa y suma sobre todos los valores de su soporte es igual a 1.
   iii. Obtenga su media y varianza.
   iv. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante falle n veces antes de aprobar el examen?. Esta variable también se considera con distribución geométrica, pero aunque guarda una relación 1-1 con la anterior su expresión (parametrización) es diferente. De su fdp y no olvide señalar su soporte y espacio paramétrico.
   v. Obtenga la media y varianza de esta parametrización.

2. Al poner en funcionamiento una máquina, existe cierta probabilidd de que el operario cometa un error. De manera realista se puede suponer que éste aprende en si la probabilidad de cometer errores disminuye cuando use la máquina en repetidas coasiones. Supongamos que el operario hace n intentos y que los n ensayos son independientes. Supongamos de manera específica que

$$P(\text{un error cometido en la i-ésima repetición}) = 1/(i+1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Supongamos que se consideran 4 intentos ($n = 4$) y que se define la v.a. X como el número de operaciones hechas sin error en la máquina. Obervemos que X no se distribuye Binomial porque la probabilidad de "éxito" no es constante.

3. El número de llamadas en una hora a un telefono de servicios de una compañia internacional se puede modelar como una v.a. Poisson(λ=1.2).

   i. Encuentre la probabilidad de que no se recibirá ninguna llamada en un turno de 6 horas.
   ii. De la expresión de la probabilidad de que Armando, quien comienza a trabajar en el centro, no tendrá que atender ninguna antes de su j-ésimo turno, donde tendrá que atender al menos una.
   iii. ¿Cual es la probabilidad de que Armando tenga que contestar al menos alguna llamada en 4 de sus primeros 100 turnos (de 6 horas cada uno)? Utilize la aproximación Poisson.

4. Si X es una variable que toma valores en los naturales, muestre que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

   ¿Qué se puede decir si X con soporte $\{1, 2, \ldots, m\}$?

5. Sea X v.a. con fdp

$$P(X=a)=p \text{ y } P(X=b)=1-p.$$

   i. Encuentre $E(X)$ y $Var(X)$.

   ii. Muestre que $(X-b)/(a-b)$ es una v.a. Bernoulli.

6. En una comunidad hay m familias. Estas se clasifican segun el número de hijos, de tal forma que $n_1, n_2, \ldots, n_r$ es el número de familias con $1, 2, \ldots, r$ hijos, respectivamente. Entonces $\sum_1^r n_i = m$. Hay dos procesos con el que se selecionan familias para contar el número de hios. En el primero una familia se selecciona aleatoriamente y sea X el número de hijos en esa familia. En el segundo proceso se seleccion aleatoriamente un hijo de todos los hijos en la comunidad ($\sum_1^r in_i$ en total) y sea Y el número de hijos en la familia del hijo seleccionado. Muestre que $E(X) \leq E(Y)$.

7. * An urn contains n balls, numbered $1, \ldots, n$. We take (without replacement and without ordering) 5 balls from the urn (assuming that $n \geq 5$). We let X denote the lowest number we have drawn, and Y the one but largest.

   i. Compute the probability mass functions of X and Y.

   ii. Show that

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

   for all $n = 0, 1, \ldots$ and $m \leq n$.

   iii. Use ii. to compute $E(X)$

8. Suppose we want to test a large number of blood samples in order to see if they contain a certain antibody. To reduce the amount of work, one proceeds as follows. We divide the samples into groups of size k, and these k samples are put together. The resulting mixtures are tested. If the test of such a mixture is negative, no further action is required. If it is positive, then the k original samples are individually tested after all, so that in such case, a total of $k+1$ tests needs to be performed. The samples contain the antibody with probability p, independently of each other.

   i. What is the probability that a mixture of k samples contains the antibody?

   ii. Let S be the total number of tests that needs to be performed when the original number of samples is $n = mk$. Compute $E(S)$ and $Var(S)$.

   iii. For what values of p does this method give an improvement, for suitable k when we compare this to individual tests right from the beginning? Find the optimal value of k as a function of p.

9. Let (X, Y) be a random vector with probability mass function $P_{(X,Y)}(i, j) = 1/10$, for $1 \leq i \leq j \leq 4$.

   i. Show that this is indeed a probability mass function.

   ii. Compute the marginal distributions of X and Y.

   iii. Are X and Y independent?

   iv. Compute $E(XY)$.

   v. Compute $E(X|Y=y)$ and $E(Y|X=x)$.

10. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ vector aleatorio, donde X_i es v.a. discreta $i \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre

$$VarCov(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\mathbf{X}^t) - E(\mathbf{X})E(\mathbf{X})^t$$

11. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ vector aleatorio, donde X_i es v.a. discreta $i \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre

$$VarCov(A\mathbf{X}) = A(VarCov(\mathbf{X}))A^t,$$

donde A es una matriz de constantes de dimensión $k \times n$.

12. Sea X una variable aleatoria con fd:

$$f_X(x) = |1 - x|\mathbb{I}_{[0,2]}(x).$$

   i. Grafíquela
   ii. Verifique que es una fd
   iii. Encuentre la media de X (analíticamente)
   iv. Encuentre la varianza de X

13. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

   i. $f(x) = \cos(x)\mathbb{I}_{(0,\pi/2)}(x)$
   ii. $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$

14. Sea X una v.a. con f.d.

$$f(x) = c(2x - x^3)\mathbb{I}_{\boxed{(0,5/2)}}(x)$$

consideren el intervalo (0, 2/5)

   i. ¿Cuál es el valor de c?
   ii. Encuentre la función de distribución de X.

15. Calcule el valor esperado de X si ésta v.a. tiene f.d

   i. $f(x) = 1/4[x \exp(-x/2)]\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$
   ii. $f(x) = 5/x^2\mathbb{I}_{(5,\infty)}(x)$

16. Sea $f(x, \theta) = \theta f_Y(x) + (1 - \theta)f_Z(x)$, donde θ es una constante fija tal que $\theta \in (0, 1)$ y $f_Y(\cdot)$ y $f_Z(\cdot)$ son funciones de densidades.

   i. Muestre que $f(\cdot; \theta)$ es una función de densidad
   ii. Encuentre la función de distribución de la v.a. con f.d. $f(\cdot; \theta)$ en términos de las funciones de distribución de Y y Z.
   iii. Encuentre la media y varianza de la v.a. con f.d. $f(\cdot; \theta)$ en términos de la media y varianza de Y y Z.

17. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$.

   i. ¿Cuál es la densidad de X?
   ii. Calcule las siguientes probabilidades: $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$, $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$, y $P\left(X \leq \frac{3}{4} | X > \frac{1}{2}\right)$.

18. Considérese una v.a. $X \sim \exp(\theta)$. Demuestre que

$$P(X > s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

para $s, t > 0$.

19. Sea $f_X(x; \theta) = (\theta x + 1/2)I_{(-1,1)}(x)$, donde θ es constante.

i. ¿Para que valores de θ es $f_X(\cdot;\theta)$ una función de densidad?

ii. Encuentre la media de X

iii. ¿Para qué valores de θ se minimiza $Var(X)$?

20. Sea X v.a. con funcón de distribución (f.d.) $F_X(\cdot)$. ¿Cuál en términos de $F_X(\cdot)$ es la f.d de $X\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) = max\{0, X\}$?

21. Si $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, encuentre la distribución de $Y = tan(X)$. Nota: No olvide especificar el soporte de la f.d. de Y.

22. Si $f_X(x) = 2x\exp(-x^2)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, encuentre la función de densidad de $Y = X^2$.

23. Si $f_X(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, encuentre la función de distribución de $X/(1 + X)$.

24. Sea X con f.d. $f_x(x)$ tq $f_X(x) = 0$ si $x \leq 0$. Encuentre la densidead de $Y = aX^2 + b$ con a, b escalares y $a > 0$, en términos de $f_X(\cdot)$.