Elementos de Estadística y Probabilidad

Tarea 6

Entregar: 3, 5, 7, 9, 10, 12, 15
Fecha de entrega: Viernes 26 de mayo, 2017.

1. En teoría de graficas la grafica $G(n, p)$ (de Erdös-Rényi) se construye con n nodos que se conectan aleatoriamente con probabilidad p. Un arco es la representación de una conexion entre dos nodos. En la gráfica $G(n, p)$ cada arco entre cualesquiera dos nodos se incluye en la gráfica con probabilidad p (con probabilidad $(1 - p)$ no se incluye) y esta selección (o no) es independiente de la existencia (o no) de cualquier otro arco. Considere que la grafica no permite que existan arcos que contectan un nodo con sí mismo, sino solo hay arcos de la forma $(v_i, v_j) =$, donde v_i, v_j son nodos y son diferentes.

   i. ¿Cuál es la distribución de la variable X que define el número de conexiones a otros nodos que un nodo seleccionado aleatoriamente de la población tiene?

   ii. Si $n = 10$ y $p = 0.3$

      a. Calcule la probabilidad un nodo seleccionado aleatoriamente sea aislado (sin conectarse con algún otro nodo). Esto es equivalente a obtener la proporción de nodos sin ninguna conexión.

      b. Calcule la probabilidad de que un nodo seleccionado aleatoriamente tenga a lo más tres conexiones.

   iii. Si n es grande (n=1000) y p pequeña ($p = 0.05$), Obtenga las respuestas con la aproximación Poisson.

2. Suponga que la duración (en horas) de cierto tubo de radio es una variable aleatoria continua X con fd

$$f_X(x) = \frac{c}{x^2} I_{(100,\infty)}(x)$$

   i. Obtenga el valor de c para el cual $f_X(\cdot)$ es una fd.

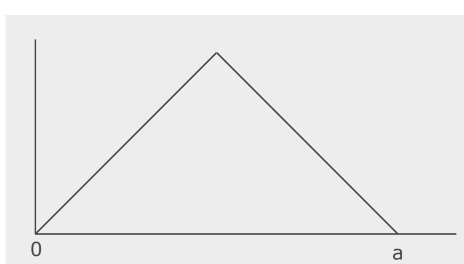
   ii. ¿Cuál es la probabilidad de que un tubo dure menos de 200 horas si se sabe que el tubo todavía funciona después de 150 horas de servicio?

   iii. Obtenga el primer momento de X.

3. Encuentre la media y varianza de las siguientes variables aleatorias

   i. X tiene la fd $f_X(x) = |1 - X| I_{(0,2)}(x)$

   ii. X tiene fd dada por la siguiente figura:



iii. X tiene la fd $f_X(x) = \frac{1}{2}[\theta I_{(0,1)}(x) + I_{[1,2]}(x) + (1-\theta)I_{(2,3)}(x)]$, donde $\theta \in (0,1)$ es constante.

4. Suponga que la media y varianza de cartas que una oficina postal maneja son respectivamente 10,000 y 2,000. ¿Qué puede decir sobre la probabilidad de que esta oficina postal maneje entre 8,000 y 12,000 cartas maana?

5. Un biólogo quiere estimar el tiempo de vida de una variedad de mosca de fruta. Él quiere obtener una muestra de moscas de tamaño n desde nacimiento y medir su tiempo de vida. Si se asume que el tiempo de vida de las moscas son v.a.'s iid con varianza 1.5 días, ¿cuál es el menor valor de n (que puede calcularse con esta información) para estar 95 % seguros que el promedio obtenido de la muestra seleccionada está a 0.2 días de distancia del verdadero valor medio de la vida de las moscas de fruta?

6. Sea X una v.a. con media 3 y $E(X^2) = 13$. Use el Teorema de Chebychev para encontrar una cota inferior para $P(-2 < X < 8)$

7. Una caja tiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Las bolas numeradas 1 y 2 son rojas mientras que las otras son blancas. Extraemos dos bolas al azar de la caja y sea X, Y las variables aleatorias que representan el número de bolas rojas y el número de bolas pares en la muestra, respecivamente. Halle la distribuciones de X, de Y y conjunta. Determine si estas variables son independientes.

8. Lanzamos una moneda tres veces y definimos las siguientes variables aleatorias: X es el número de águilas, Y es la longitud de la mayor sucesión de águilas en la muestra. Por ejemplo $X(A,S,A) = 2$, $Y(A,S,A) = 1$; $X(A,A,S) = 2$, $Y(A,A,S) = 2$. Halle la distribución conjunta, las distribuciones marginales y determine si estas variables son independientes.

9. Considere dos eventos A y B tales $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definamos las variables X y Y como $X = I_A$, $Y = I_B$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Argumente o demuestre.

   i. X y Y son independientes
   ii. $P(X^2 + Y^2) = 1/4$
   iii. $P(XY = X^2Y^2) = 1$
   iv. La v.a. X tiene distribución uniforme en el intervalo (0,1)
   v. X y Y tienen la misma distribución

10. Considere n observaciones iid de X cuya distribución es Bernoulli(0.3) y considere $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   i. ¿Cuál es la distribución aproximada de Y basados en el Teorema central del limite? Especifique los parámetros de las distribuciones involucradas.
   ii. Simule $n = 10$ observaciones de X y súmelas. Repita esto 1000 veces y grafique el histograma de probabilidad de estos 1000 datos. A esta gráfica sobreponga las distribuciones de acuerdo a i. y ii.
   iii. Repita iii. con $n = 10000$. Coménte.

11. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables X y Y como $X = I_A$, $Y = I_B$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas

   i. Las variables aleatorias X y Y son independientes
   ii. $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$
   iii. $P(XY = X^2Y^2) = 1$
   iv. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo (0,1)

v. Las variables X y Y tienen la misma distribución.

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de X con fd $\theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, donde $\theta > 0$. Obtenga el estimador puntual de θ por el método de momentos.

13. Los siguientes datos corresponden a la longitud (en milímetros) de piezas fabricadas por una máquina

104	109	111	109	87
86	80	119	88	122
91	103	99	108	96
104	98	98	83	107
79	87	94	92	97

Entonces $\sum x_i = 2,451$ y $\sum x_i^2 = 243,505$.

i. Calcular un estimador insesgado para la media de la población.

ii. Calcular un estimador insesgado para la varianza de la población.

14. Sean $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ variables aleatorias iid con densidad Normal de media μ y varianza σ^2. Se desea estimar μ, pero los valores individuales de la variables se han extraviado y se dispone sólo de las medias

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i.$$

Para integrar las dos fuentes de informacin se utiliza un estimador de la forma

$$\hat{x} = \lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2,$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$. Pruebe que un estimador de este tipo es centrado para μ e indique el valor de λ.

15. El tiempo en segundos T que un ordenador tarda en ejecutar una tarea sigue una variable aleatoria continua de funcin de densidad

$$f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(t),$$

con $\alpha > 1$.

i. Utilizando el mtodo de los momentos, propnga un estimador para el parmetro α.

ii. Se ejecuta 5 veces la tarea, y se cronometra el tiempo que ha tardado cada vez. Estos tiempos son (en segundos) son 6, 5, 3, 7, 2. Basándonos en esta muestra, y el estimador de α anterior, estime la probabilidad de que la siguiente tarea a realizarse en la computadora se tarde más de 5 segundos.